| | |
|---|---|
| SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO<br>NAM ĐỊNH<br><br>**ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN<br>DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA<br>NĂM HỌC 2024 – 2025**<br>Môn thi: **TOÁN (Đề số 1)**<br>*Thời gian làm bài: 180 phút*<br>(Đề thi gồm: 01 trang.) |

**Câu 1: (5,0 điểm)** Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-1+\dfrac{1}{x^2+3}=y+\dfrac{1}{y^2+2y+4} \\ \sqrt{2x^2-9y}+3=\sqrt{2y-1}+3\sqrt{x-3} \end{cases}$ với $x,\ y\in\mathbb{R}$.

**Câu 2: (4,0 điểm)** Cho dãy số $(u_n)$ xác định bởi $u_1=2$ và $u_{n+1}=\dfrac{u_n\left(2u_n^2+2\right)}{2u_n^2-u_n+2}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

a) Tính giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{u_1^2+1}+\dfrac{1}{u_2^2+1}+\dots+\dfrac{1}{u_n^2+1}\right)$.

b) Với mỗi số nguyên dương $n$, đặt $v_n=n^a.u_n^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của $a$ để dãy số $(v_n)$ có giới hạn hữu hạn.

**Câu 3: (3,0 điểm)** Xét hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f\left(x^2-xf(y)\right)+f(xy)=(x-y)f(x)+xf(y),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

a) Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số lẻ.

b) Tìm tất cả các hàm số $f$ thỏa mãn yêu cầu.

**Câu 4: (4,0 điểm)** Cho tam giác $ABC$ có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn $(O)$, các đường cao $AD, BE, CF$ đồng quy tại $H$. Lấy điểm $K$ thuộc $(O)$ sao cho $\widehat{AKH}=90^\circ$ và lấy điểm $G$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$ sao cho $\widehat{DGH}=90^\circ$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm của các đoạn $HA, HK$.

a) Gọi $P$ là trung điểm của đoạn $BC$. Chứng minh ba điểm $P, H, K$ thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng $GM$ và $DN$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng Euler của tam giác $ABC$.

**Câu 5: (4,0 điểm)**

a) Cho tập hợp $X=\{1;2;3;...;2025\}$. Hỏi có bao nhiêu cách phân hoạch $X$ thành ba tập hợp con khác rỗng?

b) Cho số nguyên dương $n\geq 4$ và $n$ đường thẳng trên mặt phẳng sao cho không có hai đường thẳng song song và không có ba đường thẳng đồng quy. Các đường thẳng này chia mặt phẳng thành các phần. Chứng minh có ít nhất $\dfrac{2}{3}(n-1)$ phần là tam giác.

---------- ***HẾT*** ----------

| | |
|---|---|
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**<br>**NAM ĐỊNH**<br><br>**ĐỀ CHÍNH THỨC** | **ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH LẬP ĐỘI TUYỂN**<br>**DỰ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA**<br>**NĂM HỌC 2024 – 2025**<br>Môn thi: **TOÁN (Đề số 2)**<br>*Thời gian làm bài: 180 phút*<br>(Đề thi gồm: 01 trang.) |

**Câu 1: (4,0 điểm)** Cho các số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $2a^2+3b^2+6c^2=1$.

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{4a+2}+\dfrac{1}{9b+3}+\dfrac{1}{36c+6}<1$.

**Câu 2: (4,0 điểm)** Xét đa thức $P(x)=\sum\limits_{i=0}^{2024}a_ix^i$ với các hệ số thực, có bậc bằng $2024$ và có $2024$ nghiệm thực phân biệt.

a) Giả sử $a_{2023}=0$, hãy xét dấu của tích $a_{2024}.a_{2022}$.

b) Gọi $k(P)$ là số lượng số $i\in\{0;1;2;...;2024\}$ thỏa mãn $a_i=0$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất có thể có của $k(P)$ khi đa thức $P(x)$ thay đổi.

**Câu 3: (4,0 điểm)** Cho đường tròn $(O)$ cố định và dây cung $BC$ cố định, không là đường kính của $(O)$. Điểm $A$ di động trên $(O)$ sao cho tam giác $ABC$ nhọn và $AB<AC$. Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$. Các điểm $T$ và $J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $BOC$ và $BHC$.

a) Chứng minh khi $A$ di động thì $OT.OJ$ không đổi.

b) Gọi $P$ là điểm đối xứng của $B$ qua đường thẳng $AC$, $Q$ là điểm đối xứng của $C$ qua đường thẳng $AB$. Lấy $I$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $APQ$. Chứng minh khi $A$ di động thì đường thẳng $AI$ luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 4: (4,0 điểm)** Cho số nguyên tố lẻ $p$ và xét số nguyên dương $n$ thay đổi thỏa mãn: Với mỗi số nguyên dương $a>1$, nếu $a$ không chia hết cho $p$ thì tổng các ước nguyên dương khác 1 của $a^n$ chia hết cho $p^{2024}$.

a) Chứng minh $n$ chia hết cho $p$ và $p-1$.

b) Tìm số nguyên dương $n$ nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện của bài toán.

**Câu 5: (4,0 điểm)** Giả sử $S$ là tập hợp hữu hạn các điểm mà mỗi điểm của nó được tô bởi một trong hai màu đỏ hoặc xanh (điểm được tô màu đỏ gọi là điểm đỏ, điểm được tô màu xanh gọi là điểm xanh). Gọi $A_1, A_2, ..., A_{68}$ là các tập con của tập $S$ mà mỗi tập chứa đúng năm điểm và thoả mãn đồng thời các điều kiện (i) và (ii) sau đây:

(i) Mỗi tập trong các tập $A_1, A_2, ..., A_{68}$ chứa ít nhất một điểm đỏ;

(ii) Với ba điểm bất kì trong tập $S$, tồn tại duy nhất $i\in\{1;\ 2;\ ...;\ 68\}$ mà tập $A_i$ chứa cả ba điểm đó.

a) Tìm số phần tử của tập $S$.

b) Tồn tại hay không số $k\in\{1;\ 2;\ ...;\ 68\}$ mà tập $A_k$ chứa bốn hoặc năm điểm đỏ?

---------- ***HẾT*** ----------